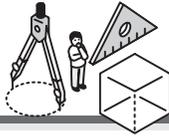




# 古典音律と平均律

## —リサージュ図形とオイラー格子による分析—



日本学生科学賞

山梨学院中学校（山梨県） 疋田 權

指導教諭 成島 秀樹

### ●どんな研究なの？

音律とは、音の高さ同士の関係である音程を集めたもので、ピュタゴラス以来 2500 年に渡る応用数学のテーマです。バロックヴァイオリニストである筆者は、歴史的考証を踏まえた演奏（ヒストリカー・インフォームド・パフォーマンス、HIP）のために、当時の音律を研究しました。

### ●研究の方法

まず古典音律や平均律について、五度圏と呼ばれる伝統的な図を元に、各音程の数比と対数セントを計算して整理しました。そして音律同士を比較するため、リサージュ図形（図 1）と、オイラー格子（図 2）を用いて分析を行いました。

例えば古代から中世に用いられたピュタゴラス音律は、ドとソ、レとラ…の間がそれぞれ純正な完全五度（ $3/2 = 1.5$ ）なので、素数 2 と 3 の累乗のみで構成される三限界純正律です。代わりに、ドとミ間のような長三度は高くなります（ $81/64 \approx 1.266$ ）。

一方、バロック時代に用いられた中全音律は、純正な長三度（ $5/4 = 1.25$ ）から逆算した中全音律の五度（ $\sqrt{5} \approx 1.497$ ）から生成され、素数 2 と 5 の累乗で構成されます。

### ●研究の結果

ピュタゴラス音律、いわゆる純正律（五限界純正律）、中全音律、12 平均律、31 平均律、キルンベルガー第一法から第三法、ヤング第二法、53 平均律といった音律について、成り立ちかたや響きなどの特徴を視覚的に示す結果を得ました。

### ●研究の結論

I. 開相で 30 周期分のリサージュ図形を使えば、聴き分けのが難しい微妙な音程差も、簡単に見分けられます（図 1）。言わば「音程の顕微鏡」です。実際に中全音律とそれを近似する 31 平均律、五限界純正律とそれを近似する 53 平均律は、お互い非常に似たりリサージュ図形になります。

II. 音律には群（ぐん）としての数学的性質があります。音律中の全音程を生成するのに必要な最小限の生成元の数を階数、全音程の数を位数と呼ぶなら、五限界純正律は階数 3、位数無限の自由アーベル群であり、そのオイラー格子は無限に広がる平面を成します（図 2）。これは「音律の航空図」としても有用です。ピュタゴラス音律や中全音律は階数 2、位数無限でそのオイラー格子は無限に伸びるチューブ（円筒形の表面）または五円玉に似た環面（アニュラス）を成すこと、n 平均律は階数 1、位数 n の巡回群で、それらや同型の音律のオイラー格子は、すべてドーナツ状の平面（二次元トーラス）を隙間なく敷き詰められることもわかりました。

III. ファとシの音程は三全音と呼ばれ、今は不協和音として扱われます。しかし中全音律の三全音（ $5\sqrt{5}/8 \approx 1.398$ ）は、七限界の純正音程（ $7/5 = 1.4$ ）に接近し、その後の音律では再び離れていったことがわかりました。バロック時代に不協和音ではなかったこの「三中全音（筆者命名）」こそ、和声法が当時急激に発達した原因のひとつかもしれません。

### ●研究の今後について／アピールポイント

本研究は、引き続き歴史上の音律を比較分析する方向の他に、七限界純正律以上への拡張、n 平均律と p 限界純正律の誤差の解析、リサージュ図形を利用した新たな音楽体験の創出、工学的な応用、オイラー格子を活用した新たな楽器製作など、多くの発展可能性を秘めています。詳しい研究結果は二次元バーコードを参照してください（図 3）。

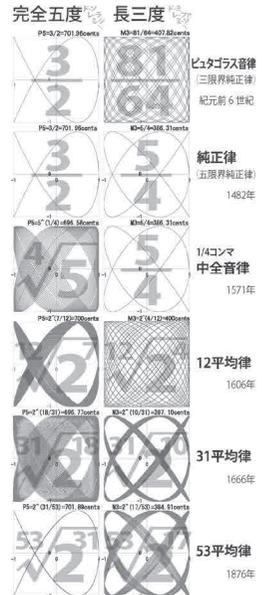


図 1

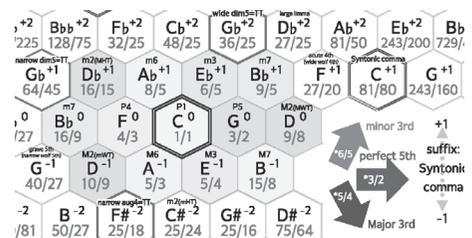


図 2



図 3 日本学生科学賞 審査時プレゼン